Soukromá obchodní akademie, spol. s.r.o.

Svatováclavská 1404

43801 Žatec

IČO : 25124811 DIČ : CZ 25124811

|  |  |
| --- | --- |
| **Digitální učební materiál – I A11** | **Tématická oblast** |
| Název předmětu | **MATEMATIKA** |
| Jméno, příjmení, titul autora | Miloslav Novák, Mgr. |
| Název práce | **Kombinatorika**  **TEORIE** |
| Stupeň a typ vzdělávání | středoškolské vzdělávání |
| Pracovní skupina – třída | 4. ročník |
| Očekávaný výstup | žák rozlišuje mezi kombinacemi na jedné a variacemi či permutacemi na druhé straně |
| Použité programové vybavení |  |
| Použitá studijní literatura |  |
| Použité nebo doporučené www stránky |  |

**Motivační příklady**

**Př. 1**

Na mistrovství světa v ledním hokeji startovalo kdysi 8 mužstev. Hráli jednokolově systémem každý s každým. Kolik zápasů bylo na mistrovství sehráno ?

Řešení bez znalosti kombinatoriky :

Základní množina Z =

Č – R, Š, F, U, K, N, I 7 zápasů

R - Š, F, U, K, N, I už jen 6 zápasů ( s Č už sehráno )

Š - F, U, K, N, I 5

F - U, K, N, I 4

U - K, N, I 3

K - N, I 2

N I 1

**Celkem : 28 zápasů**

**Důležité : Č versus R = R versus Č =**

Sestavovali jsme dvojice z osmi prvků tak, že na pořadí prvků při výběru nezáleželo.

**Př. 2**

V širší reprezentaci orientačních běžců je osm mužů. Kolik můžeme sestavit dvojčlenných hlídek tak, že záleží i na tom, kdo poběží první a kdo druhý úsek ?

Řešení bez znalosti kombinatoriky :

Základní množina Z =

1. úsek …. velké písmeno

2. úsek …. malé písmeno

Možnosti : Ab Ba Ca Da Ea Fa Ga Ha

Ac Bc Cb Db Eb Fb Gb Hb

Ad Bd Cd Dc Ec Fc Gc Hc

Ae Be Ce De Ed Fd Gd Hd

Af Bf Cf Df Ef Fe Ge He

Ag Bg Cg Dg Eg Fg Gf Hf

Ah Bh Ch Dh Eh Fh Gh Hg

**Celkem : 8 . 7 = 56 hlídek**

**Důležité : Ab Ba**

Sestavovali jsme dvojice z osmi prvků tak, že na pořadí prvků při výběru záleželo.

První příklad je příkladem tzv. kombinací, druhý pak variací. Nyní si oba pojmy, včetně tzv. permutací, zavedeme.

**KOMBINACE VARIACE**

**k- té třídy z n prvků**

**jsou skupiny po k prvcích vybírané z n-prvkové množiny**

**tak, že**

**NA POŘADÍ PRVKů při výběru**

**NEZÁLEŽÍ ZÁLEŽÍ**

**PERMUTACE**

**jsou variace pro n k**

**Permutace z n prvků** jsou tedy skupiny po n prvcích vybírané z n – prvkové množiny tak, že na pořadí prvků záleží.

Definice :

**Kombinace k – té třídy z n – prvků jsou k – prvkové podmnožiny n – prvkové množiny.**

**Variace k – té třídy z n – prvků jsou uspořádané k – tice z n – prvkové množiny.**

Už víme, co jsou kombinace na jedné a variace s permutacemi na druhé straně. Zajímá nás ale ještě jejich počet.

**Počet permutací z n prvků** se označuje **P(n)** a vypočítá se podle vzorce : **P(n) = n!**

**n!** se nazývá **n – faktoriál** a definuje se takto :

**n! = n. (n-1). (n-2). (n-3).** ……… **. 1**

**Pozor : 0! = 1**

**1! = 1 2! =** 2.1 = **2 3! =** 3.2.1 = **6 4! =** 4.3.2.1 = **24**

**5! =** 5.4! = **120 6! =** 6.5! = **720 7! =** 7.6! = **5040** atd.

**Počet variací k – té třídy z n prvků** se označuje **(n)** nebo **V(k, n)** a vypočítá se podle vztahu

**V(k, n) = = .k!**

*viz př. 2 : V(2, 8) =*  = 8.7 = **56**

**Počet kombinací k – té třídy z n prvků** se označuje **(n)** nebo **C(k, n)** a vypočítá se dle vztahu

**C(k, n) =**

se nazývá **kombinační číslo** a definuje se jako

**=**

Počet kombinací k – té třídy z n prvků se tedy určí dle vztahu

**C(k, n) = = , kde n**

*viz př. 1 : C(2, 8) = = = =* **28**

**Poznámka : V(k, n) = k!.C(k, n)**

**Př. 3**

Kolik existuje dvojciferných přirozených čísel, která lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, přičemž se žádná cifra nemůže opakovat ?

Sestavujeme dvojice z deseti prvků. Na pořadí prvků přitom záleží. Jedná se tedy o variace 2. třídy z deseti prvků bez opakování.

V(2, 10) = = = 10.9 = 90

Dvojciferné číslo však nemůže začínat nulou.

Nutno tedy odečíst všechny dvojice čísel začínající nulou a těch je V(1, 9) = 9

**Hledaných čísel je 81.**

( Metoda „malé dítě“ : Na začátku může být devět číslic (bez nuly). Za každou z možných číslic může být zase pouze devět cifer (nesmí to být ta samá číslice). Devětkrát devět je **81.**

Doposud jsme se zabývali příklady, kdy se prvky ve skupině nemohly opakovat.

Zadejme nyní příklad obdobný příkladu 3 následujícím způsobem :

**Př. 4**

Kolik existuje **všech** dvojciferných přirozených čísel, která lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ?

V úvahu přicházejí čísla 10, **11**, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19

20, 21, **22,** 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29

30, 31, 32, **33**, 34, 35, 36, 37, 38, 39

90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, **99**

Nevyhovující dvojice 00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09

**Hledaných čísel je** 9 . 10 = **90,** nebo, chcete-li – 10 = **90**

**Důležité :** Sestavujeme dvojice z deseti prvků, na pořadí prvků záleží, prvky se mohou opakovat. Jedná se tedy o **variace druhé třídy z deseti prvků s opakováním ( – variace první třídy z deseti prvků s opakováním ( )**

Metoda „malé dítě“ : K jedenaosmdesáti možnostem z příkladu 3 nutno přičíst ještě 9 možností (**11, 22, ……. , 99)**

81 + 9 = **90**

***Poznámka:*** *Kdybychom chtěli tvořit všechna dvojciferná čísla z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, bylo by jich*  **= 81 , což odpovídá počtu variací druhé třídy z devíti prvků s opakováním.**

**Počet variací k – té třídy z n prvků s opakováním** se značí **V´(k, n)** a vypočítá se dle vzorce

**V´(k, n) =**

**Počet permutací z n prvků s opakováním**

**Jestliže se mezi prvky nachází stejné prvky r, s, t (n) =**

**Jestliže se mezi prvky nachází r a (n – r) prvků (n) =**

**Př. 5**

Česká televize připravuje program v hlavním vysílacím čase na následujících 14 dní měsíce. V programu se mají vyskytovat 4 filmy, 4 díly seriálů, 3 dokumentární pořady, 2 sportovní přímé přenosy, 1 pohádka a 1 soutěžní pořad. Kolika způsoby lze program sestavit ?

Máme k dispozici 14 pořadů, všechny musíme využít, některé pořady se opakují, na pořadí prvků ale NEZÁLEŽÍ ( „ film jako film“ ). Jedná se tedy o **permutace s opakováním ze 14 prvků, přičemž se objevují 4F, 4S, 3D, 2SP, 1P, 1SOU.**

Počítáme následujícím způsobem :  **(14) = =**

**= 14.13.11.10.3.7.6.5 = 14 714 700**

**Odpověď :** Program lze sestavit **14 714 700 způsoby.**

**Př. 6**

Každý člověk má jednu ze čtyř krevních skupin **A, B, AB, nebo 0.** Kolik existuje různých možností, setkají-li se dva dárci krve ?

n = 4

k = 2

na pořadí prvků nezáleží (setkají-li se dárci **A** a **B**, je to stejné, jako když se setkají dárci **B** a **A**)

**kombinace**

oba dárci mohou mít stejnou krevní skupinu **kombinace s opakováním**

Metoda „malé dítě“ : **A A**

**A B B B**

**A AB B AB AB AB**

**A 0 B 0 AB 0 00**

4 + 3 + 2 + 1

**Řešení : 10 možností**

Metoda kombinatorická :

**Počet kombinací k-té třídy z nprvků s opakováním** se značí **(n)** nebo

**C´(k, n).** Někdo používá místo C písmeno K.

**(n) = =**

V našem případě tedy : (4) = = = = **10**