Soukromá obchodní akademie, spol. s.r.o.

Svatováclavská 1404

43801 Žatec

IČO : 25124811 DIČ : CZ 25124811

|  |  |
| --- | --- |
| **Digitální učební materiál – II B18** | **Tématická oblast** |
| Název předmětu | **MATEMATIKA** |
| Jméno, příjmení, titul autora | Miloslav Novák, Mgr. |
| Název práce | **Goniometrické rovnice** |
| Stupeň a typ vzdělávání | středoškolské vzdělávání |
| Pracovní skupina – třída | 3. ročník |
| Očekávaný výstup | Řešení goniometrických rovnic pomocí úprav výrazů a využití goniometrických vzorců; užití substituční metody; znalost hodnot goniometrických funkcí význačných argumentů ; znalost definičního oboru goniometrických funkcí |
| Použité programové vybavení |  |
| Použitá studijní literatura |  |
| Použité nebo doporučené www stránky |  |
|  |  |

Znalosti, které můžeme při řešení goniometrických rovnic uplatnit *.*

**Goniometrické funkce záporných argumentů**

**sin(-**) = **- sin ; tg(-x) = - tgx ; cotg(-x) = - cotgx**

**cos(-x) = cosx**

Z goniometrických funkcí je sudá pouze funkce sínus, ostatní goniometrické funkce jsou liché. Graf funkce sínus je souměrný podle osy y, grafy ostatních goniometrických funkcí jsou souměrné podle počátku.

**Vztahy mezi goniometrickými funkcemi stejného argumentu**

**tgx . cotgx = 1**

**tgx =**

**cotgx =**

**Goniometrické funkce dvojnásobného a polovičního argumentu**

**sin2x = 2sinx.cosx**

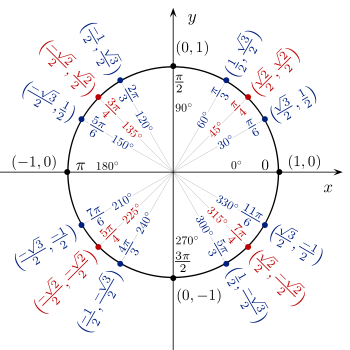
**cos2x =**

**=**

**=**

**Kvadranty a hodnoty goniometrických funkcí význačných argumentů**

Pomocí tzv. jednotkové kružnice

[](http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Unit_circle_angles_color.svg)

**Znaménka hodnot goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Kvadrant** | **α** | **sin α** | **cos α** | **tg α** | **cotg α** |
| **1. kvadrant** | 0° - 90° | + | + | + | + |
| **2. kvadrant** | 90° - 180° | + | - | - | - |
| **3. kvadrant** | 180° - 270° | - | - | + | + |
| **4. kvadrant** | 270° - 360° | - | + | - | - |

**Hodnoty goniometrických funkcí význačných argumentů**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| [**Stupně**](http://cs.wikipedia.org/wiki/Stupe%C5%88_(%C3%BAhel)) | [**Radiány**](http://cs.wikipedia.org/wiki/Radi%C3%A1n) | [**Sinus**](http://cs.wikipedia.org/wiki/Sinus) | [**Kosinus**](http://cs.wikipedia.org/wiki/Kosinus) | [**Tangens**](http://cs.wikipedia.org/wiki/Tangens) | [**Kotangens**](http://cs.wikipedia.org/wiki/Kotangens) |
| **0** | 0\, | 0\, | 1\, | 0\, | -\, |
| **30** | \frac{\pi}{6} | \frac{1}{2} | \frac{\sqrt{3}}{2} | \frac{\sqrt{3}}{3} | \sqrt{3} |
| **45** | \frac{\pi}{4} | \frac{\sqrt{2}}{2} | \frac{\sqrt{2}}{2} | 1\, | 1\, |
| **60** | \frac{\pi}{3} | \frac{\sqrt{3}}{2} | \frac{1}{2} | \sqrt{3} | \frac{\sqrt{3}}{3} |
| **90** | \frac{\pi}{2} | 1\, | 0\, | -\, | 0\, |
| **120** | \frac{2\pi}{3} | \frac{\sqrt{3}}{2} | -\frac{1}{2} | -\sqrt{3} | -\frac{\sqrt{3}}{3} |
| **135** | \frac{3\pi}{4} | \frac{\sqrt{2}}{2} | -\frac{\sqrt{2}}{2} | -1\, | -1\, |
| **150** | \frac{5\pi}{6} | \frac{1}{2} | \frac{-\sqrt{3}}{2} | \frac{-\sqrt{3}}{3} | -\sqrt{3} |
| **180** | \pi\, | 0\, | -1\, | 0\, | -\, |
| **210** | \frac{7\pi}{6} | -\frac{1}{2} | -\frac{\sqrt{3}}{2} | \frac{\sqrt{3}}{3} | \sqrt{3} |
| **225** | \frac{5\pi}{4} | -\frac{\sqrt{2}}{2} | -\frac{\sqrt{2}}{2} | 1\, | 1\, |
| **240** | \frac{4\pi}{3} | -\frac{\sqrt{3}}{2} | -\frac{1}{2} | \sqrt{3} | \frac{\sqrt{3}}{3} |
| **270** | \frac{3\pi}{2} | -1\, | 0\, | -\, | 0\, |
| **300** | \frac{5\pi}{3} | -\frac{\sqrt{3}}{2} | \frac{1}{2} | -\sqrt{3} | -\frac{\sqrt{3}}{3} |
| **315** | \frac{7\pi}{4} | -\frac{\sqrt{2}}{2} | \frac{\sqrt{2}}{2} | -1\, | -1\, |
| **330** | \frac{11\pi}{6} | -\frac{1}{2} | \frac{\sqrt{3}}{2} | \frac{-\sqrt{3}}{3} | -\sqrt{3} |

**Příklady :**

**I. Řešte následující goniometrické rovnice :**

**a) sinx =**

Řešení : sinx 0 xI,II. kvadrant x = 60 + k.360 nebo x = 120 + k.360

Správná odpověď : P =

**b) cosx = -**

Řešení : cosx 0 xII, III. kvadrant cosx´ = , x´ = 45 převod do příslušných kvadrantů , tj. 135, 225 ; nezapomenout na periodu funkce kosínus

Správná odpověď : P =

**c) sinx = -**

Řešení : sinx 0 xIII,IV. kvadrant sinx´ = x´ = 30 = převod do příslušných kvadrantů , tj. 210 , 330 ; nezapomenout na periodu funkce sínus

Správná odpověď : P =

**d) cosx = sinx**

Řešení : obě funkce nabývají stejných znamének v I. a III. kvadrantu ; v I. kvadrantu mají hodnoty stejné pro ; tento úhel odpovídá ve III. Kvadrantu úhlu

Správná odpověď : P =

**II. Řešte následující goniometrické rovnice :**

**a) tgx =**

Řešení : tgx 0 xI. kvadrant x = 30 + k.180

Správná odpověď : P =

**b) cotgx = -**

Řešení : cotgx 0 xII. kvadrant cotgx´ = , x´= 30 = ; úhel převést do II. kvadrantu a přidat periodu funkce tangens

Správná odpověď : P =

**c) tgx = - 1**

Řešení : tgx 0 xII. kvadrant tgx´ = -1 , x´= 45 = ; úhel převést do II. kvadrantu a přidat periodu funkce tangens

Správná odpověď : P =

**d) tgx = cotgx**

Řešení : obě funkce nabývají ve všech kvadrantech stejných znamének ; v I. kvadrantu mají hodnoty stejné pro ; tento úhel odpovídá v dalších kvadrantech úhlům vždy o dalších 90 větším

Správná odpověď : P =

**III. Řešte následující goniometrické rovnice**

**a) x – cosx = 0**

Řešení : vytýkáme cosx a řešíme rovnici v součinovém tvaru : cosx.(x – 1) = 0

cosx = 0 v (x – 1) = 0

cosx = 0 v rámci jedné periody jsou výsledky úhly 90 a 270

x = 1 cosx = 1 v rámci jedné periody jsou výsledky úhly 0 , 180 , 360

Sjednotíme-li všechny úhly, zjistíme, že se jedná o každý násobek

Správná odpověď : P =

**b) x – sinx = 0**

Řešení : vytýkáme sinx a řešíme rovnici v součinovém tvaru : sinx.(x – 1) = 0

sinx = 0 v (sinx – 1) = 0

sinx = 0 v rámci jedné periody jsou výsledky úhly 0 , 180 , 360 ( to odpovídá každému násobku ) sinx = 1 v rámci jedné periody vyhovuje jediný úhel a to 90

Sjednotíme-li všechny úhly a přidáme k nim periodu

Správná odpověď : P =

**c) 3x - cotgx = 0**

Řešení : vytýkáme cotgx a řešíme rovnici v součinovém tvaru : cotgx.(x – ) = 0

cotgx = 0 v (3cotgx – ) = 0

cotgx = 0 cotgx =

cotgx = 0 x = k.

cotgx = x = + k

Správná odpověď : P =

**d) x + 3tgx = 0**

Řešení : vytýkáme tgx a řešíme rovnici v součinovém tvaru : tgx.(x + 3) = 0

tgx = 0 v (tgx + 3) = 0

tgx = 0 tgx = =

tgx = 0 x = k.

tgx = x = + k

Správná odpověď : P =

**IV. Řešte následující goniometrické rovnice**

**a) x – 4 tgx +**

Řešení : jedná se o kvadratickou rovnici s neznámou y = tgx, řešíme pomocí vzorce

= = tgx = = nebo tgx = =

Řešením první rovnice jsou všechny úhly 60 + k.180. Řešením rovnice druhé pak úhly 30 + k.180

Správná odpověď : P =

**b) 6x + cosx – 5 = 0**

Řešení : jedná se opět o kvadratickou rovnici, neznámá se však objevuje ve dvou goniometrických funkcích jednu funkci musíme nahradit druhou ;

Použijeme známou Pythagorovu větu ve tvaru

6.(1 - x) + cosx – 5 = 0

6 - 6 + cosx – 5 = 0

6 – cosx – 1 = 0 , tj. kvadratická rovnice o neznámé y = cosx

= =

cosx = x = 60+ k.360 nebo x = 300 + k.360

cosx = - x = 19928´ + k.360 nebo x = 34032´+ k.360

Výsledky sjednotíme.

Správná odpověď : P =

**c) sin( 3x - ) =**

Řešení : na levé straně rovnice máme sínus složeného argumentu, musíme substituovat : 3x - = y

siny = y = + 2k nebo y = + 2k

návrat k substituci :

3x - = + 2k

3x = + 2k

x =

3x - = + 2k

3x = + 2k

x = +

Správná odpověď : P =

**d) sin4x = - cos2x**

Řešení : uvědomíme si, že sinus čtyřnásobného argumentu je vlastně sínem dvojnásobku dvojnásobného argumentu

sin4x = sin 2.2x ; využijeme vzorce **sin2 = 2sin ,** tedy

sin4x = 2sin2x.cos2x a zároveň rovnici anulujeme

2sin2x.cos2x + cos2x = 0 ; vytýkáme a dostáváme rovnici v součinovém tvaru

co2x.(2sin2x + 1) = 0 cos2x = 0 nebo sin2x =

cos2x = 0 2x = k. , x = k.

sin2x = 2x = , x = nebo 2x = , x =

Správná odpověď : P =